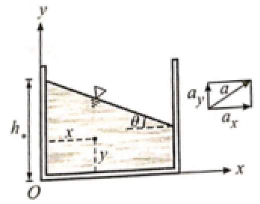
به نام خدا

مکانیک سیالات

طاهره کاظمی

تعادل نسبی



فرض کنید مایعی با وزن مخصوص γ و شتاب a در حال حرکت مستقیم است.
مختصات فشار هر نقطه از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$P(x,y) = P_0 - \gamma\left(\frac{a_x}{g}\right)x - \gamma\left(1+\frac{a_y}{g}\right)y$$

- معادله سطح آزاد مایع را می‌توان به صورت زیر است:

$$f(x,y)=0 \longrightarrow 0 = P_0 - \gamma\left(\frac{a_x}{g}\right)x - \gamma\left(1+\frac{a_y}{g}\right)y \longrightarrow y = -\left(\frac{a_x}{a_y+g}\right)x + \frac{P_0}{\gamma(1+\frac{a_y}{g})}$$

این معادله یک خط راست است که در شکل بالا به صورت $y = -xtan\theta + h_0$ مشخص شده است. بنابراین می‌توان نوشت:

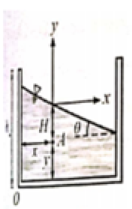
$$tan\theta = \frac{ax}{ay+g}$$

$$h_0 = \frac{P_0}{\gamma(1+\frac{a_y}{g})} \longrightarrow P_0 = \gamma h_0\left(1+\frac{a_y}{g}\right)$$

- اگر در رابطه محاسبه فشار P ثابت در نظر گرفته شود، معادله نقاط هم‌فشار مانند زیر می‌شود:

$$P = P_0 - \gamma\left(\frac{a_x}{g}\right)x - \gamma\left(1+\frac{a_y}{g}\right)y \longrightarrow y = -\left(\frac{a_x}{a_y+g}\right)x + \frac{P_0 - P}{\gamma(1+\frac{a_y}{g})}$$

این رابطه نشان می‌دهد که نقاط هم‌فشار روی یک خط راست (در حالت سه بعدی، روی یک صفحه) به موازات سطح آزاد قرار دارند.



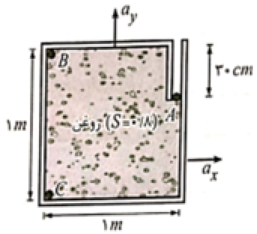
- اگر محور مختصات را مانند شکل درست بالای نقطه مورد نظر قرار دهیم محاسبه فشار به شکل زیر است:

$$P_0 = 0\ ,\ \ x = 0\ ,\ \ y = -H \longrightarrow P_A = 0 - 0 - \gamma\left(1+\frac{a_y}{g}\right)(-H)$$

$$P_A = \gamma H\left(1+\frac{a_y}{g}\right)$$

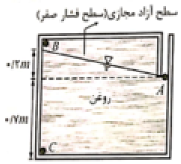
بنابراین برای تعیین فشار در هر نقطه از مایع، باید فاصله قائم آن نقطه تا سطح آزاد (H) را بیابیم و سپس با استفاده از فرمول بالا، فشار نقطه مورد نظر را محاسبه کنیم.

مثال۱: در شکل مقابل ظرف نشان داده شده محتوی روغن به چگالی نسبی ۰.۸ می‌باشد. چنانچه $a_y = a_x = \frac{g}{4}$ باشد، فشار در نقاط A و B و C را تعیین کنید.



با توجه به شکل حفره تعبیه شده در ظرف، مایعی به بیرون تخلیه نخواهد شد. در این حالت با محاسبه $tan\theta$ خواهیم داشت:

$$tan\theta = \frac{a_x}{a_y + g} = \frac{\frac{g}{4}}{(\frac{g}{4}) + g} = 0.2$$



نقطه A در مجاورت هوای آزاد و روی سطح آزاد است: $P_A = 0$

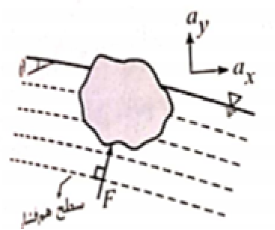
$$H_B = 0.3 - 0.2 = 0.1 \qquad , \qquad H_C = 1 - 0.1 = 0.9$$

$$P_B = \gamma H\left(1 + \frac{a_y}{g}\right) = 8(-0.1)\left(1 + \frac{g}{4}\right) = -1\ kpa$$

همانطور که ملاحظه می‌کنید، چون B بالای سطح آزاد مجازی است، H_B منفی شده و فشار در این نقطه منفی خواهد بود.

$$P_C = \gamma H\left(1 + \frac{a_y}{g}\right) = 8(0.9)\left(1 + \frac{4}{g}\right) = 9\ kpa$$

نکته : نیروی وارد بر یک جسم غوطه‌ور یا شناور در سیال (نیروی شناوری)، رو به بالا و عمود بر سطح آزاد مایع است، مقدار این نیرو از رابطه زیر محاسبه می‌شود.



$$F = \frac{\gamma_f V_d}{cos\theta}\left(1 + \frac{a_y}{g}\right)$$

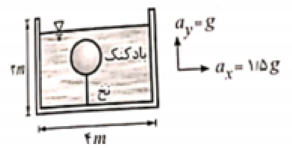
در حالت سکون ، θ=0 و $a_y = 0$ می‌باشد :

$$F = \gamma_f V_d = F_B$$

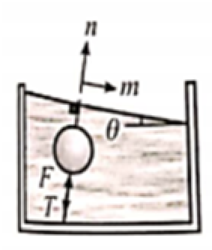
نکته: اگر ظرف محتوی مایع را کاملا ببندیم و سپس آن را تحت شتاب خطی ثابت به حرکت درآوریم، در آن صورت:

۱- در هیچ نقطه‌ای از مایع فشار منفی نخواهیم داشت.

۲- به هنگام ترسیم سطح آزاد، حتما بایستی نقطه‌ای از مایع وجود داشته باشد که فشار آن صفر باشد.

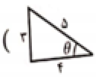


مثال۲: بادکنکی به قطر ۲۰cm و وزن ناچیز، توسط یک نخ به کف ظرف بسته است و ظرف محتوی آب به وزن مخصوص ۱۰ kN/m3 می‌باشد. اگر ظرف مطابق شکل روبرو تحت شتاب قرار گیرد، نیروی کشش نخ چند نیوتن خواهد بود؟ ($\pi = 3$)

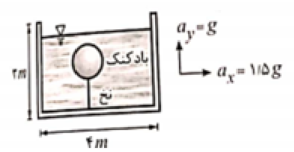


$$\boldsymbol{tan\theta = \frac{a_x}{a_y + g} = \frac{1.5g}{g + g} = \frac{3}{4}}$$

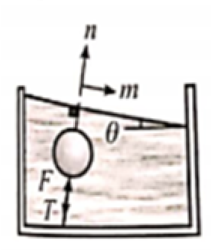
$$\boldsymbol{COS\theta = \frac{3}{5}}$$

()

$$\boldsymbol{\sum F_n = 0 \longrightarrow T = F = \frac{\gamma_f V_d}{cos\theta}\left(1 + \frac{a_y}{g}\right) = \frac{10(\frac{\pi\times0.2^2}{6})}{\frac{4}{5}} \times \left(1 + \frac{g}{g}\right) = 0.1\pi\ kN = 100\pi\ N}$$

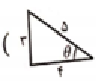


مثال۲: بادکنکی به قطر ۲۰cm و وزن ناچیز، توسط یک نخ به کف ظرف بسته است و ظرف محتوی آب به وزن مخصوص ۱۰ kN/m3 می‌باشد. اگر ظرف مطابق شکل روبرو تحت شتاب قرار گیرد، نیروی کشش نخ چند نیوتن خواهد بود؟ ($\pi = 3$)

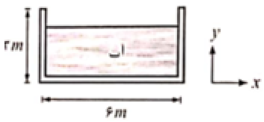


$$\boldsymbol{tan\theta = \frac{a_x}{a_y + g} = \frac{1.5g}{g + g} = \frac{3}{4}}$$

$$\boldsymbol{COS\theta = \frac{3}{5}}$$

()

$$\boldsymbol{\sum F_n = 0 \longrightarrow T = F = \frac{\gamma_f V_d}{cos\theta}\left(1 + \frac{a_y}{g}\right) = \frac{10(\frac{\pi\times0.2^2}{6})}{\frac{4}{5}} \times \left(1 + \frac{g}{g}\right) = 0.1\pi\ kN = 100\pi\ N}$$

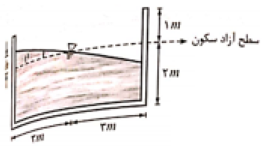


مثال۳: مخزن شکل مقابل تا $\frac{2}{3}$ ارتفاعش حاوی آب می‌باشد. مخزن تحت بردار شتاب $\vec{a} = g\hat{i} + \frac{g}{3}\hat{j}$ به حرکت در می‌آید. در این صورت نیروی وارد بر کف مخزن چندبرابر حالت سکون خواهد شد؟

(بعد عمود برصفحه مخزن ۲ متر می‌باشد)

ابتدا وضعیت سطح آزاد مایع به هنگام حرکت شتابدار و همچنین امکان تخلیه آب به بیرون مخزن را بررسی می‌کنیم.

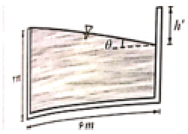
$$tan\theta = \frac{a_x}{a_y + g} = \frac{g}{\frac{g}{3} + g} = \frac{3}{4}$$



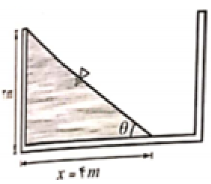
اگر فرض کنیم آبی به بیرون تخلیه نشود، در آن صورت سطح آب به شکل زیر خواهد بود.

$$tan\theta = \frac{h}{3} \longrightarrow \frac{3}{4} = \frac{h}{3} \longrightarrow h = 2.25\ m$$

چون $h > 1m$ است، بنابراین فرض انجام شده صحیح نبود و آب از مخزن بیرون می‌ریزد. در این حالت سطح آب می‌تواند به شکل مقابل باشد:



$$tan\theta = \frac{\acute{h}}{6} \longrightarrow \frac{3}{4} = \frac{\acute{h}}{6} \longrightarrow \acute{h} = 4.5\ m > 3$$



همانطور که ملاحظه می‌کنید ارتفاع $\acute{h}$ بیشتر از ارتفاع ظرف شده است. بنابراین سطح آزاد آب فقط می‌تواند به صورت زیر باشد:

$$tan\theta = \frac{3}{x} \longrightarrow \frac{3}{4} = \frac{3}{x} \longrightarrow x = 4m$$

در ادامه برای محاسبه نیروی وارد بر کف مخزن می‌نویسیم:

$$F = \int_A PdA = \int_A \gamma H\left(1 + \frac{a_y}{g}\right)dA = \gamma(1 + \frac{a_y}{g})\int_A HdA = \gamma V(1 + \frac{a_y}{g})$$

پس در حل این مسئله خواهیم داشت:

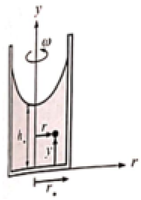
$$F_2 = 10\left(\frac{1}{2} \times 3 \times 4 \times 2\right)(1 + \frac{\frac{g}{3}}{g}) = 160\ kN$$

از طرفی نیروی وارد بر کف مخزن در حالت اول(حالت سکون) نیز برابر وزن آب داخل مخزن است:

$$F = 10(2 \times 6 \times 2) = 240kN$$

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{160}{240} = \frac{2}{3}$$

حرکت دورانی یکنواخت حول محور قائم:



یک ظرف استوانه‌ای به شعاع r_0 که محتوی مایعی به وزن مخصوص γ، با سرعت زاویه‌ای ω حول محور قائم دوران می‌کند.

در این حالت همه ذرات مایع نیز با سرعت زاویه‌ای ω دوران خواهند کرد و تنها شتاب وارد به آن‌ها شتاب شعاعی a_r است.

$$a_r = r\omega^2$$

شتاب شعاعی باعث می‌شود تا مایع مانند یک جسم صلب حول محور قائم دوران کند که به آن حرکت گردابی اجباری می‌گویند

اگر دستگاه مختصات روی محور استوانه و در کف آن باشد، در آن صورت فشار متناظر از معادله زیر به دست می‌آید:

$$P(r,y) = P_0 + \gamma\left(\frac{\omega^2 r^2}{2g}\right) - \gamma y$$

در این رابطه P_0 فشار در مبدأ مختصات است که مقدار آن برابر γh_0 می‌باشد.

ولی چنانچه دستگاه مختصات در امتداد محور استوانه به سطح آزاد مایع منتقل شود، مقدار P_0 برابر صفر خواهد شد.

- معادله سطح آزاد مایع را می‌توان با یک برش قائم و تبدیل r به x به صورت زیر خواهد شد:

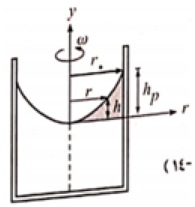
$$P(x,y) = P_0 + \gamma\left(\frac{\omega^2 x^2}{2g}\right) - \gamma y$$

سطح آزاد مایع: $P(x,y)=0 \longrightarrow P_0 + \gamma\left(\frac{\omega^2 x^2}{2g}\right) - \gamma y = 0 \longrightarrow y = (\frac{\omega^2}{2g})x^2 + \frac{P_0}{\gamma} \longrightarrow y = (\frac{\omega^2}{2g})x^2 + h_0$

رابطه بالا در حالت دوبعدی، یک سهمی درجه دو است. بنابراین می‌توان گفت که سطح آزاد مایع در حرکت گردابی اجباری بصورت سهمی است.

- مشابه با حرکت شتاب‌دار یکنواخت، می‌توان با ثابت در نظر گرفتن فشار (p=constant)، معادله سطوح هم‌فشار به شکل زیر می‌شود:

$$y = \left(\frac{P_0 - P}{\gamma}\right) + \left(\frac{\omega^2}{2g}\right)x^2$$



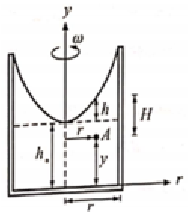
این رابطه نشان می‌دهد که نقاط هم‌فشار، روی یک سهمیگون که به موازات سطح آزاد است قرار دارند.

- اگر محورمختصات را به گونه‌ای در امتداد قائم جابجا کنیم که مرکز آن روی سطح آزاد قرار گیرد، در این صوررت فاصله قائم هر نقطه روی سطح آزاد تا محور افقی (محور r) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$P = P_0 + \gamma\left(\frac{\omega^2 r^2}{2g}\right) - \gamma y \quad , \quad P = 0 \quad , \quad P_0 = 0 \quad , \quad y = h \longrightarrow h = \frac{\omega^2 r^2}{2g}$$

برهمین اساس ارتفاع سهمیگون تشکیل شده توسط سطح آزاد، به ازای $r = r_0$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

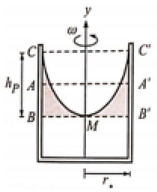
$$h_p = \left(\frac{\omega^2 {r_0}^2}{2g}\right)$$



• اگر سطح آزاد مایع پس از دوران ظرف استوانه‌ای مطابق شکل زیر باشد، در آن صورت فشار در هر نقطه دلخواه از مایع را می‌توان به صورت زیر محاسبه کرد:

$$P = P_0 + \gamma\left(\frac{\omega^2 r^2}{2g}\right) - \gamma y = \gamma\left[h_0 + \frac{\omega^2 r^2}{2g} - y\right] = \gamma[h_0 + h - y]$$

با توجه به شکل می‌بینیم که $[h_0 + h - y]$ برابر H یعنی فاصله قائم نقطه مورد نظر از سطح آزاد می‌باشد. بنابراین داریم:



$$P = \gamma H$$

• اگر قبل از دوران ظرف استوانه‌ای، مطابق شکل مقابل سطح آزاد آب در تراز $A\acute{A}$ ایستاده باشد، در آنصورت پس از دوران ظرف، سهمیگون $CM\acute{C}$ تشکیل می‌شود. باتوجه به اینکه حجم سهمیگون نصف جم استوانه محیطی خود می‌باشد، بنابراین بافرض عدم تخلیه مایع به بیرون ظرف داریم:

نصف حجم استوانه $C\acute{C}\acute{B}B$= حجم سهمیگون $CM\acute{C}$ = حجم ناحیه هاشور خورده = حجم استوانه $A\acute{A}\acute{B}B$

یا می‌توان نوشت:

$$(\pi r^2)(AB) = \frac{1}{2}(\pi r^2)(BC) \longrightarrow AB = \frac{1}{2}BC$$

و همینطور داریم:

$$AC = BC - AB = BC - \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}BC$$

یعنی مایع به همان اندازه که در مرکز استوانه‌ای پایین می‌رود، در دیواره هم بالاخواهد رفت:

$$AC = AB = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}h_P$$

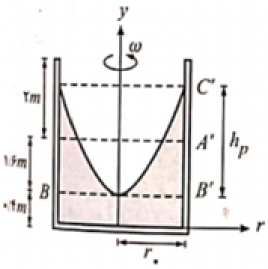
همانطور که می‌بینیم برای برقراری رابطه بالا باید:

۱- ظرف استوانه‌ای باشد.

۲- مایعی از ظرف به بیرون تخلیه نشود.

۳- دوران استوانه حول محور قائم گذرنده از مرکز قاعده آن باشد.

مثال: یک مخزن استوانه‌ای با قطرm ۲ و ارتفاع ۴ متر تا نصف از آب پر شده است. اگر استوانه با سرعت زاویه‌ایrad/s ۸ حول محور قائم گذرنده از مرکز قاعده خود دوران کند، در آن صورت فشار در کف ظرف به فاصله ۰.۵ متری از محور دوران چقدر است؟



قدم اول: محاسبه h_p :

$$h_p = \frac{\omega^2 r_0^2}{2g} = 8^2 \times \frac{1^2}{2 \times 10} = 3.2\ m$$

$$\acute{A}\acute{C} = \frac{1}{2} \times 3.2 = 1.6\ m < 2m$$

یعنی مایعی به بیرون ظرف تخلیه نمی‌شود و همان‌قدر که مایع از اطراف بالا می‌رود، از مرکز ظرف نیز پایین خواهد آمد:

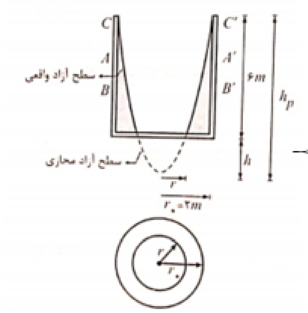
$$\acute{A}\acute{B} = \acute{A}\acute{C} = 1.6m$$

حال با توجه به سطح آزاد ترسیمی، فشار در نقطه موردنظر را محاسبه می‌کنیم:

$$P = \gamma H = \gamma_W[h_0 + h - y\,] = 10\left(0.4 + \frac{8^2 \times 0.5^2}{2 \times 10} - 0\right) = 12kpa$$

مثال: یک مخزن استوانه‌ای با محور قائم، قطر ۴ متر و ارتفاع ۶ متر تا نیمه از آب پر شده است. استوانه با چه سرعتی (برحسب rad/s) حول محور قائم خود بچرخد تا $\frac{1}{4}$ مساحت کف ظرف در اثر تخلیه آب به بیرون خشک شود؟

وضعیت سطح آزاد آب به صورت زیر است:

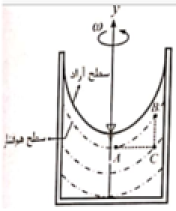


$$\begin{cases} h = \frac{\omega^2 r^2}{2g} \quad , hp = \frac{\omega^2 r_0^2}{2g} \longrightarrow \frac{h}{h_p} = \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 \\ A = \frac{1}{4}A_0 \longrightarrow \pi r^2 = \frac{1}{4}\pi {r_0}^2 \longrightarrow \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 = \frac{1}{4} \\ hp = h + 6 \end{cases}$$

$$\frac{h}{h+6} = \frac{1}{4} \longrightarrow h = 2m \longrightarrow hp = 8m$$

$$hp = \frac{\omega^2 r_0}{2g} \longrightarrow 8 = \frac{\omega^2 \times 2^2}{2 \times 10} \longrightarrow \omega = 2\sqrt{10}\ rad/s$$

نکته: اگر یک ظرف استوانه‌ای مطابق شکل، به هنگام دوران با سرعت زاویه ω (حول محور قائم y) مدنظر باشد، در آن‌صورت اختلاف تراز نقاط هم‌فشار و اختلاف فشار نقاط هم‌تراز مانند زیر است:



الف) اختلاف تراز نقاط هم‌فشار:

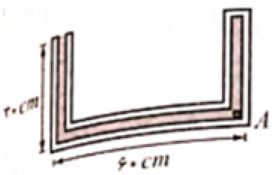
$$P_A = P_B \longrightarrow P_0 + \gamma\left(\frac{\omega^2 r_A{}^2}{2g}\right) - \gamma y_A = P_0 + \gamma\left(\frac{\omega^2 r_B{}^2}{2g}\right) - \gamma y_B$$

$$y_B - y_A = \frac{\omega^2}{2g}\left(r_B^2 - r_A^2\right) = \Delta y_{BA}$$

ب) اختلاف فشار نقاط هم‌تراز:

$$y_A = y_C \longrightarrow P_C - P_A = \left[P_0 + \gamma\left(\frac{\omega^2 r_C{}^2}{2g}\right) - \gamma y_C\right] - \left[P_0 + \gamma\left(\frac{\omega^2 r_A{}^2}{2g}\right) - \gamma y_A\right] = \frac{\omega^2}{2g}\left(r_C{}^2 - r_A{}^2\right)\gamma$$

$$\Delta P_{CA} = \frac{\omega^2}{2g}\left(r_C{}^2 - r_A{}^2\right)\gamma$$

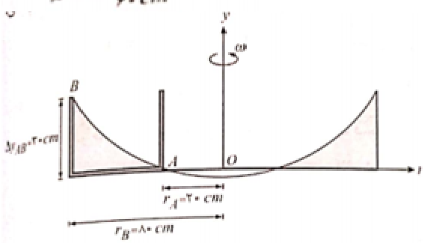


مثال: در شکل مقابل، لوله حول محور قائمی که در سمت راست A و به فاصله ۲۰ سانتی متر از آن است، دوران می‌کند. اگر فشار نسبی در A صفر باشد، سرعت دورانی چقدراست؟

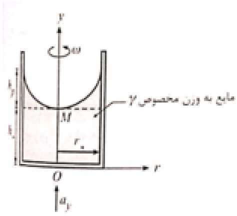
با ترسیم سطح آزاد مجازی برای مایع دوران یافته در لولخ و شبیه‌سازی آن با دوران ظرف استوانه‌ای، خواهیم داشت:

دو نقطه A و B به علت قرارگیری روی سطح آزاد مایع، دارای فشار یکسان صفر می‌باشند.

بنابراین داریم:



$$\Delta y_{BA} = \frac{\omega^2}{2g}\left(r_B{}^2 - r_A{}^2\right)\gamma \longrightarrow 0.3 = \frac{\omega^2}{2\times10}\left(0.8^2 - 0.2^2\right) \longrightarrow \omega = \sqrt{10}\, rad/s$$



نکته: اگر یک ظرف استوانه‌ای (محتوی مایعی به وزن مخصوص γ) ضمن حرکت دورانی یکنواخت، دارای حرکت انتقالی در راستای y نیز باشد، در آن‌صورت ارتفاع سهمیگون ایجاد شده توسط سطح آزاد مایع را می‌توان به‌صورت زیر محاسبه کرد:

$$h_P = \frac{\omega^2 {r_0}^2}{2(g + a_y)}$$

در این حالت برای محاسبه فشار بایستی رابطه بالا را به صورت زیر به کار برد:

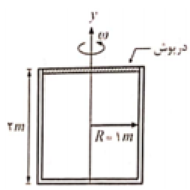
$$P = \gamma H(1 + \frac{a_y}{g})$$

نکته: اگر ظرف محتوی مایع را ببندیم و سپس آن را تحت یک سرعت زاویه‌ای ثابت به دوران درآوریم، در آن‌صورت:

۱- در هیچ نقطه‌ای از مایع فشار منفی نخواهیم داشت.

۲- به هنگام ترسیم سطح آزاد، حتما بایستی نقطه‌ای از مایع وجود داشته باشد که فشار آن صفر باشد.

مثال: شکل مقابل یک ظرف استوانه‌ای پر از روغن ($\gamma = 8\ kN/m^3$) را نشان می‌دهد که پس از بستن قسمت بالای آن با یک درپوش، با سرعت زاویه‌ای ۱۰ rad/s حول محور y به دوران درآمده است. نیروی وارد بر کف ظرف و درپوش بالای آن چقدر است؟

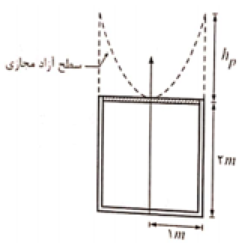


ابتدا سطح آزاد مجازی (سطح فشار صفر) را ترسیم کرده و hp را محاسبه می‌کنیم:

$$hp = \frac{\omega^2 r_0^2}{2g} = \frac{10^2 \times 1^2}{2 \times 10} = 5\ m$$

الف) محاسبه نیروی وارد بر کف مخزن:

برای کف مخزن هر دو حجم مایع مجازی و حقیقی را در نظر می‌گیریم

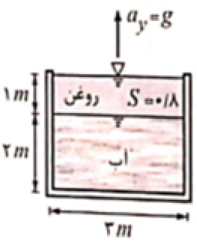


$$F_{\text{کف}} = \gamma V = 8\left[\pi \times 1^2 \times 2 + \frac{1}{2}\pi \times 1^2 \times 5\right] = 36\pi\ kN$$

ب) محاسبه نیروی وارد بر درپوش:

برای درپوش مخزن فقط حجم مایع مجازی را در نظر می‌گیریم.

$$F_{\text{کف}} = \gamma V = 8\left[\frac{1}{2}\pi \times 1^2 \times 5\right] = 20\pi\ kN$$



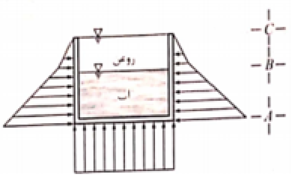
تمرین۱: یک مخزن مکعبی شکل روباز به ضلع ۳ متر، مطابق شکل از آب و روغن پر شده است.اگر این مخزن تحت شتاب قائم g به سمت بالا حرکت کند، نیروی وارد بر کف مخزن چندبرابر نیروی وارد بر هریک از دیواره‌های جانبی آن است؟ (γ=10kN/m3)

ابتدا با محاسبه فشار در نقاط A و B و C نمودار توزیع فشار را رسم می‌کنیم:

$$P_A = P_0 = \gamma h_0 \left(1 + \frac{a_y}{g}\right) = (8 \times 1 + 10 \times 2)\left(1 + \frac{g}{g}\right) = 56\ kpa$$

$$P_B = P_0 - \gamma y \left(1 + \frac{a_y}{g}\right) = 56 - 10\left(1 + \frac{g}{g}\right)2 = 16\ kpa$$

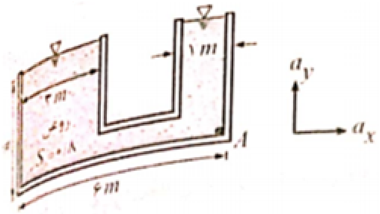
$$P_C = P_{atm} = 0$$



$$F_{\text{کف}} = P_A A = 56 \times 3^2 = 504\ KN$$

$$F_{\text{دیواره}} = \frac{16 \times 1}{2} \times 3 + (16 + 56)\left(\frac{2}{2}\right)3 = 240$$

$$\frac{F_{\text{کف}}}{F_{\text{دیواره}}} = \frac{504}{240} = 2.1$$

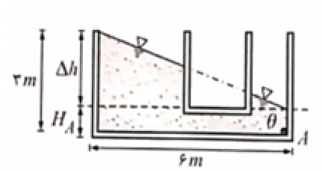


تمرین۲: ظرف نشان داده شده در شکل، با شتاب ثابت $a_x = a_y = \frac{g}{2}$ به حرکت در می‌آید.

فشار در نقطه A بر حسب کیلوپاسکال چقدراست؟ ($\gamma w = 10KN/m^3$)

سطح آزاد تثبیت شده مایع را که بخشی از ان نیز مایع مجازی است را رسم می‌کنیم:

شیب را محاسبه می‌کنیم:



$$tan\theta = \frac{a_x}{a_y + g} = \frac{\frac{g}{2}}{\frac{g}{2} + g} = \frac{1}{3}$$

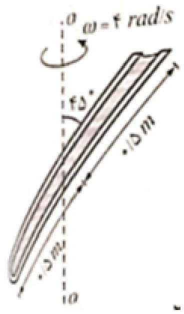
$$\Delta h = 6tan\theta = 6 \times \frac{1}{3} = 2\ m$$

$$H_A = 3 - \Delta h = 3 - 2 = 1m$$

$$P_A = \gamma H_A \left(1 + \frac{a_y}{g}\right) = 8 \times 1 \times \left(1 + \frac{\frac{g}{2}}{g}\right) = 12\ kpa$$

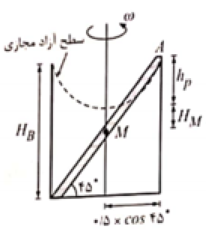
نکته: H فاصله نقطه موردنظر تا سطح آزاد مایع است، این سطح آزاد می‌تواند واقعی یا مجازی باشد.

تمرین۳: در شکل مقابل لوله ای به طول ۱ متر نشان داده شده است که کف آن بسته می باشد و با آب پر شده است. زاویه لوله با امتداد قائم ۴۵ درجه است و لوله با سرعت زاویه ای rad/s۴حول محور قائمی که از وسط آن می گذرد، دوران می کند. نسبت فشار در کف لوله به وسط آن تقریبا چقدر است؟ (g=10 m/s2)



سطح آزاد مجازی مایع را رسم می‌کنیم:

$$h_p=\frac{\omega^2 r_0^2}{2g}=\frac{4^2\times(0.5\times cos45)^2}{2\times 10}=0.1\ m$$



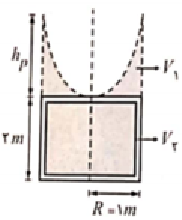
$$\begin{cases} H_M=0.5\ sin45-0.1=\frac{\sqrt{2}}{4}-0.1=0.25\ m \\ H_B=1\times sin45=\frac{\sqrt{2}}{2}=0.7\ m \end{cases}$$

$$\frac{P_B}{P_M}=\frac{\gamma H_B}{\gamma H_M}=\frac{H_B}{H_M}=\frac{0.7}{0.25}=2.8$$

تمرین ۴: یک مخزن استوانه‌ای دربسته پر از آب، حول محور قائمی که از مرکز آن می‌گذرد، دوران می‌کند. اگر شعاع استوانه ۱ متر، ارتفاع آن ۲ متر و سرعت دوران rad/s ۱۰ باشد، نیروی وارد بر کف مخزن و نیروی وارد بر درپوش بالایی را محاسبه کنید؟

$$(\rho_W=10^3\,\frac{kg}{M^3}\ \ ,\ g=10\ m/S^2)$$

چون مخزن دربسته است پس هیچ فشار منفی نداریم بنابراین شکل سطح آزاد مایع به شکل زیر می‌شود:



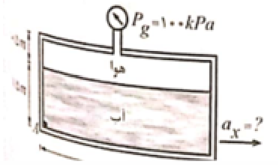
$$h_p=\frac{\omega^2 r_0^2}{2g}=\frac{10^2\times 1^2}{2\times 10}=5\ m$$

نیروی وارد بر درپوش:

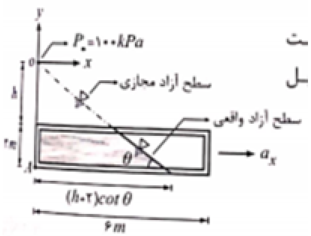
$$F=\gamma V_1=10\left[\frac{1}{2}\pi\times 1^2\times 5\right]=25\pi\ KN$$

نیروی وارد بر کف مخزن:

$$F=\gamma(V_1+V_2)=10\left[\frac{1}{2}\pi\times 1^2\times 5+\pi\times 1^2\times 2\right]=45\pi\ KN$$



تمرین۵: ظرفی مانند شکل روبرو محتوی آب است.ظرف با چه شتابی به سمت راست حرکت کند تا فشار نسبی در نقطه A برابر۱۴۰ kpa شود و همچنین نیرویهای وارد به دو انتهای ظرف (دیواره جلویی و عقبی) چقدر است؟ ($\gamma w = 10KN/m^3$ و g=10m/S2 عرض مخزن برابر ۱ متر)



در حرکت مستقیم با شتاب خطی یکنواخت، اگر ظرف محتوی مایع بسته باشد و یا تنها قسمتی از آن در معرض اتمسفر قرار داشته باشد، در آن صورت نمی‌توان برای آن سطح آزاد کامل و واقعی در نظر گرفت. در این حالت به عنوان یک راه حل بایستی از سطح آزاد مجازی (خیالی) استفاده کرد. این سطح آزاد مجازی به صورت یک صفحه (در حالت دوبعدی یک خط راست) می‌باشد که فاصله قائم هر نقطه مایع تا آن (H)، پارامتر مهم در محاسبه فشار نقطه مذکور است.

در این مساله فرض می‌کنیم که سطح آزاد در حال تثبیت شده (که البته قسمتی از آن نیز مجازی است)، به صورت زیر می‌باشد:

$$P_A = P_0 - \gamma x\left(\frac{a_x}{g}\right) - \gamma y \longrightarrow 140 = 100 - 10\left(\frac{a_x}{g}\right)(0) - 10y \longrightarrow y = -4\ m \longrightarrow h = 2\ m$$

حجم مایع درون ظرف ثابت است بنابراین داریم: (عرض مخزن: B)

$$V_1 = V_2 \longrightarrow (1.5)(6)(B) = (2cot\theta + 4cot\theta)(\tfrac{2}{2})(B) \longrightarrow cot\theta = \frac{3}{2} \longrightarrow tan\theta = \frac{2}{3}$$

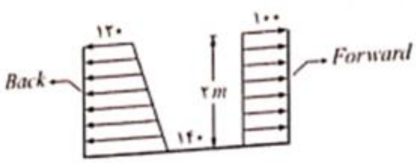
$$tan\theta = \frac{a_x}{a_y+g} = \frac{2}{3} \longrightarrow \frac{a_x}{0+g} = \frac{2}{3} \longrightarrow a_x = \frac{2}{3}g$$

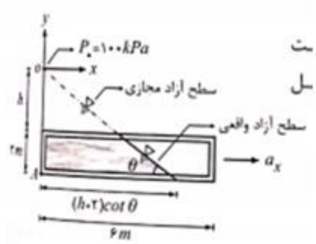
روش اول: با استفاده از نمودار توزیع فشار داریم:

$$\Delta F = F_{Back} - F_{Forwrd} = (120 + 140)\left(\frac{2}{3}\right)(1) - (100)(2)(1) = 60\ KN$$

روش دوم: استفاده از قانون دوم نیوتن:

$$F = ma = \rho V a = (1000)(1.5 \times 6 \times 1)(\frac{2 \times 10}{3}) = 60000N = 60KN$$



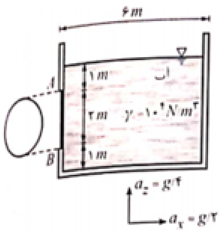


تمرین۶: مکعبی به ضلع ۱ متر از مایعی به چگالی نسبی s=0.9 پر شده است و با شتاب ۲ m/s2 به سمت پایین حرکت می‌کند. نیروی حاصل از فشار مایع وارده به هر دیواره جانبی مکعب چند می‌باشد؟ ($\rho_W = 10^3 \frac{kg}{M^3}$, $g = 10\ m/S^2$)

نیروی افقی وارد بر دیواره جانبی (قائم) مکعب برابر $F_H = P_G A$ می‌باشد که در آن P_G فشار وارد بر مرکز سطح دیوار است و به صورت زیر محاسبه می‌شود:

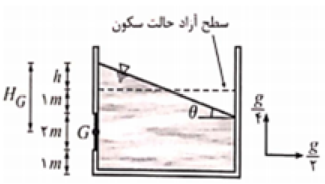
$$P_G = \gamma H_G \left(1 + \frac{a_y}{g}\right) = (9000) \times (0.5) \left(1 + \frac{-2}{10}\right) = 3600 \frac{N}{m^2}$$

$$F_H = P_G A = 3600(1 \times 1) = 3600\ N$$



تمرین۷: مرکز دریچه دایره ای شکل AB ، نصب شده در جدار مخزن شکل زیر، به فاصله ۲ متر از سطح آب در حال سکون قرار دارد. نیروی فشاری وارد بر دریچه در حالیه که ظرف با شتاب یکنواخت $\frac{g}{2}$ در راستای افق $\frac{g}{4}$ در راستای قائم حرکت داده می‌شود، چقدر می‌باشد؟

با محاسبه شیب سطح آزاد (تحت شتاب وارده)، سطح آزاد آب را رسم می‌کنیم:



$$tan\theta = \frac{a_x}{a_y + g} = \frac{\frac{g}{2}}{\left(\frac{g}{4}\right) + g} = 0.4$$

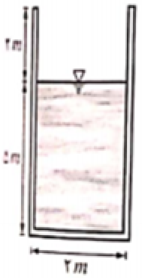
$$h = 3\ tan\theta = 3 \times 0.4 = 1.2\ m$$

$$H_G = 1 + 1 + 1.2 = 3.2\ m$$

محاسبه نیروی افقی وارد بر دریچه:

$$P_G = \gamma H_G \left(1 + \frac{a_y}{g}\right) = 10^4(3.2)\left(1 + \frac{1}{4}\right) = 40000\ pa$$

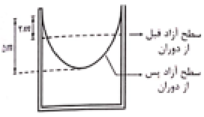
$$F_H = P_G . A = (40000)\left(\frac{\pi 2^2}{4}\right) = 40\pi \times 10^3\ N = 40\pi\ KN$$



تمرین ۸: مخزن استوانه‌ای شکل زیر به قطر ۲ متر و ارتفاع ۷ متر تا ۵ متتر از آب پر شده است. اگر این مخزن با سرعت دورانی ۱۰ rad/s حول مرکز قاعده دوران نماید، چه حجمی از آب از مخزن خارج می‌شود؟ (g=10 m/s2)

$$h_p = \frac{\omega^2 r_0^2}{2g} = \frac{10^2 \times 1^2}{2 \times 10} = 5\ m$$

$\frac{1}{2} hp = \frac{5}{2} = 2.5 > 2\ m$ آب از مخزن بیرون می‌ریزد



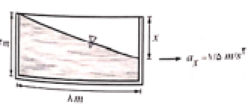
$V_1 = \pi \times 1^2 \times 2 = 2\pi$ حجم خالی اولیه

$V_1 = \frac{1}{2} \times \pi \times 1^2 \times 5 = 2.5\pi$ حجم خالی ثانویه

$$\Delta V = V_2 - V_1 = 2.5\pi - 2\pi = 0.5\pi = 1.57\ m^3$$

تمرین ۹: یک مخزن روباز به شکل مکعب مستطیل به طول ۸ متر، به عرض ۲ متر و ارتفاع ۳ متر بر روی یک سطح افقی قرار گرفته و پر از آب می‌باشد. در صورتی که این مخزن تحت تأثیر شتاب ثابت افقی $a_x = 1.5\ m/s^2$ در جهت طول قرار گیرد، چند مترمکعب از آب مخزن به بیرون تخلیه می‌شود؟ (g=10 m/s2)

وضعیت سطح آزاد آب به شکل زیر است:



$$tan\theta = \frac{a_x}{a_y + g} \longrightarrow \frac{x}{8} = \frac{1.5}{0+10} \longrightarrow x = 1.2\ m$$

حجم ناحیه خالی ظرف =حجم آب بیرون ریخته شده= $\frac{1.2 \times 8}{2} \times 2 = 9.6\ m^3$